Binormal Deformation と第二超局所化(D加群のvanishing cycleとその応用)

竹内, 潔

数理解析研究所講究録
937巻 1996年 96-103

Binormal Deformation と第二超局所化

東京大学 数理 竹内 潔 (Kiyoshi Takeuchi)
avec パリ第6大学 Pierre Schapira

§0 序

第二超局所化の理論は余接バンドルの正則包含的部分多様体に沿ったマイクロ函数を研究するために1972年頃柏原先生によって始められました。その後、Laurent により operator theory が創られ、最近では戸瀬先生等による特異性伝播への目覚ましい応用がなされました。しかしながら、柏原-Laurent [K-L] の second microfunction の層 $\mathcal{C}^2_\Lambda$ は microlocalization functor の反復により定義されているためにその zero-section は microfunction の層 $\mathcal{C}_M$ より真に大きくなっており、Hyperfunction の層 $\mathcal{B}_M$ が microfunction の層 $\mathcal{C}_M$ の zero-section と自然に一致するといった"調和"を保った拡張概念ではなく、そのことが実際、この理論の応用を大きく妨げてきました。パリ第6大学留学中に、筆者は、P. Schapira 先生の下で彼の境界値問題の理論を高余次元の場合へ拡張する研究をしていたのですが、その時に得られた境界値作用素の単射性についての定理の証明を簡略化するため

に Schapira 先生と共同で Bispecialization という新しい Functor の理論を構成しました。ここでは、この Functor の Fourier－Sato 変換として定義される Bimicrolocalization functor が、第二超局所化の理論の再構成に対し一つの解答を与えることを報告いたします。

§1 Functor の構成

まず $X \supset M \supset N$ という C^∞－多様体の列を (X, M, N) と書くことにします。$p_N : \widetilde{X}_N \longrightarrow X$ を柏原－Schapira [K－S] における X の N に沿った normal Deformation とし、$t_1 \in \mathbb{R}$ をその deformation parameter とします。すると、

$$\widetilde{M} := \overline{(p_N|_{\{t_1 \neq 0\}})^{-1} M}$$

として $\widetilde{X}_N$ の中で定義される C^∞－部分多様体が存在することがわかります。

定義 1.1 $\widetilde{X}_N$ の $\widetilde{M}$ に沿った normal deformation $(\widetilde{X}_N)\widetilde{}_{\widetilde{M}}$ を $\widetilde{X}_{NM}$ と書いて、X の (M, N) に沿った Binormal deformation と呼ぶことにする。

この二回目の Blow up の parameter を $t_2 \in \mathbb{R}$ として、$X = \{(x', x'', x''')\}$ の中で M と N がそれぞれ

$$\begin{cases} M := \{ x' = 0 \} \\ N := \{ x' = 0, \ x'' = 0 \} \end{cases}$$

と表示されているとしますと、

$$p: \widetilde{X}_{NM} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow X$$
$$\rotatebox{90}{$\in$}$$
$$(x', x'', x''', t_1, t_2) \longmapsto (t_1 t_2 x', t_1 x'', x''')$$

なる全射が標準的に構成されて、$\widetilde{X}_{NM} \cap \{t_1 = t_2 = 0\}$ は normal bundle の fiber 積 $T_N M \underset{M}{\times} T_M X$ と同型であることが容易に示されます。さてここで次の多様体の間の morphism の可換図式：

$$\begin{tikzcd}
T_N M \underset{M}{\times} T_M X \arrow[r, hook, "s"] \arrow[d, "\tau"'] & \widetilde{X}_{NM} \arrow[d, "p"] & \Omega := \{t_1 > 0, t_2 > 0\} \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "\tilde{p}"] \\
N \arrow[r, hook] & X &
\end{tikzcd}$$

を用いると次の定義に到達します。

<u>定義 1.2</u>　X 上の層複体の derived category の object $F \in D^b(X)$ に対して、その (M, N) に沿った bispecialization $\nu_{NM}(F) \in D^b(T_N M \underset{M}{\times} T_M X)$ を、

$$\nu_{NM}(F) := s^{-1} \mathbb{R} j_* \tilde{p}^{-1} F$$

で定義する。

この新しい Functor $\nu_{NM}(\cdot)$ は次のように、$T_N M \underset{M}{\times} T_M X$ の２つの zero-section $N \underset{M}{\times} T_M X$ と $T_N M$ へ制限すると [K-S] におけるふつうの specialization functor と一致致します。

定理1.3 (i) $\nu_{NM}(F)$ は $T_NM \underset{M}{\times} T_MX$ 上の biconic object である。

(ii) 次の canonical な isomorphism が存在する。

$$\begin{cases} \nu_{NM}(F)\big|_{N\underset{M}{\times}T_MX} \xleftarrow{\sim} \nu_M(F)\big|_{N\underset{M}{\times}T_MX}, \\ \nu_{NM}(F)\big|_{T_NM} \xleftarrow{\sim} \nu_N(F)\big|_{T_NM}. \end{cases}$$

さて、 $\mathcal{F}_1 : D^b(T_NM \underset{M}{\times} T_MX) \longrightarrow D^b(T_NM \underset{M}{\times} T^*_MX)$ と $\mathcal{F}_2 : D^b(T_NM \underset{M}{\times} T^*_MX) \longrightarrow D^b(T^*_NM \underset{M}{\times} T^*_MX)$ を Fourier - Sato 変換 (See [K-S] chap. III) とすると、次の2つの bimicrolocalization functor が定義されます。

定義1.4 $F \in D^b(X)$ に対して、

$$\nu\mu_{NM}(F) := \mathcal{F}_1(\nu_{NM}(F)),$$

$$\mu_{NM}(F) := \mathcal{F}_2(\nu\mu_{NM}(F)).$$

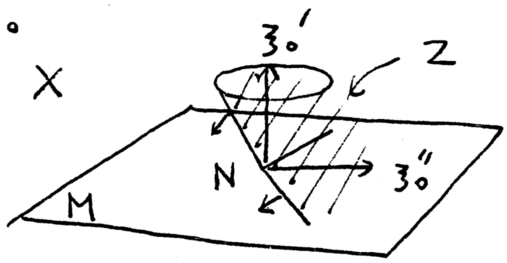
境界値問題に関連の深い Functor $\nu\mu_{NM}(\cdot)$ については、ここでは割愛させていただいて、$\mu_{NM}(\cdot)$ についての結果を述べます。

定理1.5 (i) $\mu_{NM}(F)$ は $T^*_NM \underset{M}{\times} T^*_MX$ 上 biconic.

(ii) $q = (\zeta_0' dx', \zeta_0'' dx'', 0) \in \mathring{T}^*_NM \underset{M}{\times} \mathring{T}^*_MX$ $(\zeta_0' \neq 0, \zeta_0'' \neq 0)$ における $\mu_{NM}(F)$ の stalk は、$\forall j \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$H^j\mu_{NM}(F)_q = \varinjlim_{Z,U} H^j_{Z\cap U}(U;F)$$

で与えられる。 ここで、帰納極限は、$0 \in X$ の open neighborhood U と次の形の X における閉凸錐 Z を動かしてとっている。



(iii) 次の canonical な isomorphism が存在する。

$$\begin{cases} \mu_{NM}(F)\big|_{N \underset{M}{\times} T^*_M X} \xleftarrow{\sim} \mu_N(F)\big|_{N \underset{M}{\times} T^*_M X} \\ \mu_{NM}(F)\big|_{T^*_N M} \xleftarrow{\sim} \mu_N \mathbb{R}\Gamma_M(F) \end{cases}.$$

Remark 1.6　片岡−戸瀬 [K-T] では、上の図の形の図形に台を持つ局所 cohomology をつくり出すために second comonoidal transformation が導入されています。

§2. 第二超局所化への応用

ここでは簡単のため、$X \supset L \supset M$ なる多様体の3つ組 (X, L, M) として、

$$X = \mathbb{C}^n_z, \quad L = \mathbb{C}^d_{z'} \times \mathbb{R}^{n-d}_{x''}, \quad M = \mathbb{R}^n_x$$

をとります（L は X における M の部分複素化）。 正則函数の層 $\mathcal{O}_X$ より、0次に集中している $T^*_M L \underset{L}{\times} T^*_L X$ 上の object

$$\mathcal{C}_{ML} := \mu_{ML}(\mathcal{O}_X) \otimes or_M[n]$$

が定義されますが、これを L に沿った second microfunction

の層と呼ぶことにします。 $\pi: T_M^*L \underset{L}{\times} T_L^*X \twoheadrightarrow M \underset{L}{\times} T_L^*X$ を射影として、distinguished triangle :

$$\mathbb{R}\pi_! \longrightarrow \mathbb{R}\pi_* \longrightarrow \mathbb{R}\mathring{\pi}_* \longrightarrow +1$$

を $\mathcal{C}_{ML}$ へ施しますと、次の結果が得られます。

定理 2.1 T_M^*X の正則包含的部分多様体 $\Lambda :=$ $M \underset{L}{\times} T_L^*X$ 上、次の完全列が存在する。

$$0 \to \mathcal{C}\Theta|_\Lambda \to \mathcal{C}_M|_\Lambda \to \mathring{\pi}_* \mathcal{C}_{ML} \to 0$$

ここで $\mathcal{C}\Theta$ は z' を正則パラメーターに持つ microfunction の層である。

Remark 2.2 数研の講究録 [K-T] においても、このような完全列をつくるための層 $\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}^{2}$ が全く別の方法で構成できることが報告されています。

さて、以上のように bispecialization から出発した結果、[K-S] の Chapter IV にみられるような functorial property を我々の functor $\nu_{NM}(\cdot)$, $\mu_{NM}(\cdot)$ 等に対しても殆んど同様にして得ることができます。例えば、岡田－戸瀬 [O-T] において FBI－変換を用いてコンパクト台の超函数に対して示されている second wave-front の制限、積分等の演算による振る舞いも、我々の立場からは、層 $\mathcal{C}_{ML}$ の間の morphism の構成という形で座標不変化して microlocal な演算をつくってしまえば容易に recover することができま

す。また $\mathcal{D}_X$-module に対する基本的な操作、dummy variable の方法、de-Rham 系、Cauchy-Riemann 系に対する解層複体の計算等も、以上の構成法より明らかな通り、我々の second microfunction $\mathcal{C}_{ML}$ へ自然に拡張されます。複素領域、すなわち、operator theory においてもこのような bimicrolocalization を考えることが本質的であることをみるために、Laurent [L] の second microdifferential operator にあたる環の層を構成してみましょう。 $X = X' \times X''$ を2つの複素多様体の積として、対角線集合 $\Delta_X \hookrightarrow X \times X$ と同一視します。Δ_X を含む部分対角化 $\hat{L} := X' \times X' \times \Delta_{X''} \subset X \times X$ をとって、3つ組 $(X \times X, \hat{L}, \Delta_X)$ を考えます。

<u>定理 2.3</u> $T^*_{\Delta_X}\hat{L} \underset{\hat{L}}{\times} T^*_{\hat{L}}(X \times X) \simeq T^*X' \times T^*X''$ 上に環の"層" $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{XL}$ が

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{XL} := \mu_{\Delta_X \hat{L}}(\mathcal{O}^{(0,n)}_{X \times X})[\dim^{\mathbb{C}} X]$$

によって定義される。(S-K-K のように realification map をつくることにより、) $X = X' \times X'' = \mathbb{C}^d_{z'} \times \mathbb{C}^{n-d}_{z''}$ の時は、$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{XL}$ は上記の second microfunction の層 $\mathcal{C}_{ML}$ に作用する。

上の定義による second microdifferential operator の層は、microdifferential operator の時に $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \big|_{T^*_X X} \simeq \mathcal{D}^\infty_X$ が成立するのと同様に、

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{XL}\Big|_{X'\times T^*X''} \simeq \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{X}\Big|_{X'\times T^*X''}$$

なる美しい性質を保った拡大環の層になっています。さらに正則函数で境界値表示される $\mathcal{C}_{ML}$ の stalk へ $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{XL}$ は Bony-Schapira type の積分による作用を持つことも最近の研究でわかってきております。Laurent の作用素の class は我々のものより広く、層 $\mathcal{C}_{ML}$ へ作用しないし、柏原-Laurent の second microfunction $\mathcal{C}^2_{\Lambda}$ への作用はこのような具体的な描像を持たないことに注意して下さい。

この小論のさらに詳しい内容については、現在筆者が、Schapira 先生と準備中の論文を御参照下さい。

[参考文献] [K-L] Kashiwara-Laurent : Théorème d'annulation et deuxième microlocalisation, Prépublication d'Orsay (1983).

[K-S] Kashiwara-Schapira : Sheaves on manifolds, G.M.W. 292, Springer (1990).

[K-T] Kataoka-Tose : Some remarks in 2nd microlocalization RIMS 講究録, P52-63 (1988).

[L] Laurent : Théorie de la Deuxième Microlocalisation dans le domain Complexe, Progress in Math. vol 53. Birkhäuser (1985).

[O-T] Okada-Tose : FBI-transformation and microlocalization-equivalence of the second analytic wave front sets and the second singular spectrum. J. de Math. Pures et Appl., t.70.4. P427-455 (1991).

[S-T] Schapira-Takeuchi : Déformation binormale et bispécialisation, C.R. Acad. Sci, t.319, série I. P707-712 (1994).